Q1: Prouver qu'une expression est linéaire / multilinéaire. Methods

<u>Manière "pédante"</u>: réécrire l'expression comme CL de formes linéaires provenant de la base duale (correspondant à la situation)

$$\ell : M \longrightarrow m_{11} + m_{31} + m_{22} = \ell(M)$$

$M = (m_{ij})_{i,j \leq d}$ soient $(E_{ij})_{i,j \leq d}$ la base des matrices elementaires et $(E_{ij}^{*})_{i,j \leq d}$ la base duale

de sorte que $E_{ij}^{*}(M) = m_{ij}$

alors $m_{11} + m_{31} + m_{22}$

$$= E_{11}^*(M) + E_{31}^*(M) + E_{22}^*(M)$$

est un CL de formes linéaires sur $M_d(K)$ est donc linéaire ; $l = E_{11}^* + E_{31}^* + E_{22}^*$

On peut directement : on vérifie que

$$\ell(\lambda M+N) = \lambda \ell(M) + \ell(N) \quad \text{pour } \lambda \in K, M, N \in M_n(K)$$

Cas Multilinéaire : $V = M_d(K)$

$B : (M, N) \longrightarrow m_{11} \cdot n_{11} - m_{12} \cdot n_{21} = B(M,N)$

Mq B et bilinéaire (linéaire en M et en N)

ie. $B(\lambda M + M', N) = \lambda B(M,N) + B(M',N)$?

et pareil $B(M, \lambda N + N') = \lambda B(M,N) + B(M,N')$

ou bien on dit que

$$B(M,N) = E_{11}^{2}(M)\,E_{11}^{2}(N) - E_{12}^{2}(M)\,E_{21}^{1}(N)$$

$$= E_{11}^{2} \otimes E_{11}^{1}(M,N) - E_{12}^{2} \otimes E_{21}^{2}(M,N)$$

$$B = E_{11}^{*} \otimes E_{11}^{2} - E_{12}^{2} \otimes E_{21}^{2} = \text{CL de formes}$$

multilinéaires (sont multi par le cours)

$\boxed{Q_2}$ Anneau intègre, $\neq 0$, fini = Corps

"intègre" contient "commutatif"

donc pas besoin de mentionner la commutativité.

$\boxed{Q3:}$ si la caractéristique du corps n'est pas presésée la carac peut être quelconque.

$\boxed{\text{Q4:}}$ <u>Application linéaire</u>

= une application linéaire entre 2 EVs (sur un même corps) quelconques

<u>Forme linéaire</u> = application linéaire entre un K-EV et K (vu comme K-EV)

$\boxed{\text{Q5:}}$ Complexes et Polynomes au programme de l'examen : Seuls l'existence et les résultats de bases sont demandés (niveau Gymnase Math+) mais pas de résultats "fin". Pas de Q de Cours

$\boxed{Q6}$ Oui on peut utiliser le fait que

$\mathrm{Im}(\varphi) = \ker(\varphi^*)^\perp$ pour donner une

rep cartésienne de l'Image.

Q7: Action à gauche de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$

On a déjà $\mathfrak{S}_n$ agit à droite sur V^n

en posant $(v_1, \dots, v_n)_\sigma := (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$

on veut voir que $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ $\sigma \circ \tau$

$v_{\sigma\circ\tau} = (v_\sigma)_\tau$?

$$v_{\sigma\circ\tau} = (v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(n))}) = (v_{\sigma\circ\tau(i)})_{i \leq n}$$

$$(V_\sigma)_\tau = {}^t w_\tau \text{ avec}$$

$$w = V_\sigma = (w_1, \dots, w_n)$$

avec $w_i = v_{\sigma(i)}$

$$(V_\sigma)_\tau = (w_{\tau(1)}, \dots, w_{\tau(n)}) = (v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(n))})$$

$$w_{\tau(i)} = v_{\sigma(\tau(i))} \quad = (v_{\sigma\circ\tau(i)})_{i\leq n}$$

On a une action à dte sur l'espace de variables V^n et cela induit une action à gauche sur l'ensemble des fcts de V^n vers K et en particulier sur le SEV $\mathrm{Mult}^{(n)}(V) \subset \mathcal{F}(V^n, K)$

En effet si on pose pour $\Lambda : V^n \longrightarrow K$

$$\sigma.\Lambda := v \longmapsto \Lambda(v_\sigma)$$

$$(\sigma \circ \tau).\Lambda := v \longmapsto \Lambda(v_{\sigma\circ\tau})$$

$$= \Lambda((v_\sigma)_\tau) = (\tau.\Lambda)(v_\sigma)$$

$$= \Lambda'(v_\sigma) \text{ avec } \Lambda' = \tau.\Lambda$$

$$= \sigma.\Lambda'(v) = \sigma.(\tau.\Lambda)(v)$$

$$\sigma \circ \tau \cdot \Lambda = \sigma \cdot (\tau \cdot \Lambda)$$

Q8: Si $V = K$-EV $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ base

$B^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ = base duale

alors $e_j^*(v) = x_j$ = le j ieme coef de v ds la base B

$v = x_1 . e_1 + \dots + x_d . e_d$ $\quad e_j^*(v) = x_j$.

Q 9: $\boxed{\text{Interet des Valeurs propres / vecteurs propre d'un } \varphi \in \mathrm{End}(V)}$

- Etant donne $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ on a 2 sous-espaces "interessants"

$$\ker \varphi = \{ v \in V \quad \varphi(v) = 0 \}$$

$$\mathrm{Im}\, \varphi = \{ w \in V \quad w = \varphi(v) \}$$

- ker φ est stable par φ

si $v \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(v) \in \ker \varphi$

si $\varphi(v) = 0$ $\quad$ $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(0) = 0$

et dans ker φ l'application φ est très simple = l'application linéaire nulle !!

- Sous-espace propres : $\lambda \in K$

$$V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda I_d)$$

si $v \in V_\lambda$ $(\varphi - \lambda I_d)(v) = 0 = \varphi(v) - \lambda . v$

dans V_λ φ agit par multiplication par le scalaire λ. (Homothetie de rapport λ)

$v \in V_\lambda$ $\underline{\varphi}(v) = \lambda . v$

V_λ est stable par φ :

si $v \in V_\lambda$ $\varphi(v) = \lambda . v$

et $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

$\Rightarrow \varphi(v) \in V_\lambda$

V_λ est un SEV de V où φ est "simple" puisque c'est une homothetie.

- Pour que V_λ soit interessant il faut que $V_\lambda \neq \{0_V\}$ (V_λ sera de dim ≥ 1)

- Pour trouver les V_λ tq $V_\lambda \neq \{0_V\}$ on veut que $\ker(\varphi - \lambda I_d) \neq \{0_V\}$

$\Longrightarrow$ $\det(\varphi - \lambda I_d) = 0$?

$$\det(\varphi - \lambda I_d) = (-1)^d \det(\lambda I_d - \varphi)$$

$$= (-1)^d P_{car,\varphi}(\lambda) = 0\ ?$$

les λ tq $V_\lambda \neq \{0_V\}$ sont les racines ds K

de $P_{car,\varphi}(X)$

Si c'est le cas V_λ est un SE propre de V

λ est une valeur propre de V

et un $v \in V_\lambda - \{0_V\}$ = vecteur propre.

Comme un poly a au plus degP racine

le nb de valeurs propres est $\leq$ d = dim V

- les différents SEV propres sont en

somme directe;

si B_λ = base de V_λ (λ valeur propre)

alors $\bigcup_{\lambda \text{ valeur prop}} B_\lambda$ est une famille libre

(et peut être complète en une base de V)

en particulier si $\bigcup_{\lambda \text{ vp}} B_\lambda$ est une base de V

$$\left(\sum_\lambda \dim V_\lambda = \dim V \right)$$

alors la matrice de φ ds cette base sera diagonale $Spec(\varphi)$ = {valeurs propres}

$= vac_{P_{car,\varphi}}(K)$

$= \{\lambda_1, \dots, \lambda_{d'}\}$

$$\mathrm{mat}_{B_{prop}}\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_{d'} \ddots \lambda_{d'} \end{pmatrix}$$

$d' \leq d$

$\rightsquigarrow \varphi$ est diagonalisable

Ex : si φ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas digonalisable

$$P_{car,\varphi}(X) = (X-1)^2$$

la seule vp est $\lambda = 1$

et $\ker(\varphi - Id) = K.e_1$ est de dim $1 < 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2 & 1 \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diag}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Q10 : Preuve Thm 11.7 (dim $\mathrm{Sym}^{(n)}(V)$)

si $\vec{j}$ et croissante

$$j_1 \leq j_2 \leq \cdots j_n \quad j_i \in \{1, \dots, d\}$$

alors

$$S_{j,B} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma.(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n}) \text{ est symetique}$$

Thm 11.7 : Vrai pour toute characteristique
mais

La preuve esquissée ci-dessous marche si $\mathrm{Char}(K) = 0$
$\mathrm{Char}(K) \nmid n!$

$\Big(\vec{J} = (1, \dots, 1) \quad S_{\vec{J}, B} = n! \cdot \underbrace{e_1 \otimes \dots \otimes e_1}_{n \text{ fois}}$

$\ne 0$ si $\mathrm{Car}(K) \mid n! \Big)$

Supposons $\operatorname{Car} K = 0$

On veut mq que

$S_{\vec{j},B}$ forme une base

$S_{\vec{j},B}$ est generatrice

si Λ est symmetrique $\forall \sigma$ $\sigma.\Lambda = \Lambda$

$$\Longrightarrow \sum_{\sigma} \sigma.\Lambda = n!\,\Lambda \qquad \Lambda = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} \sigma.\Lambda$$

si l'on écrit $\Lambda = \sum_{\vec{j} \in \{1,\dots,d\}^{\nearrow}} \Lambda(e_{\vec{j}})\, e^{*}_{\vec{j}}$

alors $\sum_{\sigma} \sigma.\Lambda = \sum_{\vec{j}} \Lambda(e_{\vec{j}}) \sum_{\sigma} \sigma.e^{*}_{\vec{j}}$

les $\sum_{\sigma} \sigma.e^{*}_{\vec{j}}$ sont symetriques on a $\sum_{\sigma} \sigma e^{*}_{\vec{j}} = \sum_{\sigma} \sigma e^{*}_{\vec{j}'}$

où $\vec{j}'$ est obtenu à partir de $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ en ordonnant les coordonnées

$$\left(\left\{ j_1, \dots, j_n \right\} \in \{1, \dots, d\}^n \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{en comptant} \\ \text{les multiplicité} \end{array} \right)$$

$$\left\{ j'_1 \leq j'_2 \leq \dots \leq j'_n \right\} \in \{1, \dots, d\}^n$$

$\sum_{\sigma} \sigma . e^{*}_{\vec{j}'}$ fait partie de la famille

$\left\{ S_{\vec{j}', \mathcal{B}} \quad \vec{j}' \text{ croissante} \right\}$

$\rightsquigarrow$ on a exprimé $\quad \Lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \sigma . \Lambda$

comme CL de $S_{\vec{j}', \mathcal{B}}$ $\vec{j}' \nearrow$

$\{ S_{\vec{j}',B} \quad \vec{j}' \nearrow \}$ est generatrice

elle est libre "car" si $S_{\vec{j}',B} = S_{\vec{j}'',B}$

avec $\vec{j}'$ et $\vec{j}''$ $\nearrow \rightsquigarrow \vec{j}' = \vec{j}''$

l'ensemble de $\vec{j}'$ avec $\vec{j}' \nearrow$ form un ensemble de representatants des orbites de $\{1,\dots,d\}^n$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.

$\vdots$

$\square$